Pythagorova věta a Euklidovy věty. Goniometrické funkce ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku.

Zadání[1]

1. Rozhodněte, zda každý z trojúhelníků o stranách délek $2n, n^2+1, n^2-1; n \in \mathbb{N}$ je pravoúhlý. Která z uvedených stan je jeho přeponou?
2. Vypočtěte obsah čtverce *ABCD*, je-li dáno $|AC| = 4$ cm.
3. Vypočtěte obvod čtverce *ABCD*, (E je střed strany CD, F je střed strany AD, S je střed úhlopříček) je-li dáno:
    a. $|EF| = 3$ cm
    b. $|AE| = \sqrt{5}$ cm
    c. obvod trojúhelníku *ABS* je $3 + \sqrt{18}$ cm
4. Vypočtěte obsah obdélníku *ABCD*, je-li dáno $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 8$ cm.
5. Vypočtěte obsah rovnoběžníku *ABCD*, je-li dáno $|AB| = |BC|, |AC| = 6$ cm $|BD| = 8$ cm.
6. Vypočtěte obsah lichoběžníku *ABCD* $(AB \parallel CD)$, je-li dáno: $|AB| = a = 66$ mm, $|CD| = c = 18$ mm, $|BC| = b = a + 36$ mm, $|\measuredangle BAD| = \alpha = 90°$.
7. Vypočtěte obvod lichoběžníku *ABCD* $(AB \parallel CD)$, je-li dáno: $|AD| = d = 12$ cm, $|AC| = 15$ cm, $|BD| = 20$ cm, přímka *AB* je kolmá k přímce *AD*.
8. Z daných prvků v pravoúhlém trojúhelníku *ABC* $(\gamma = 90°)$ vypočtěte další uvedené prvky:
    a. $a = 7{,}5$ m, $v_c = 5$ m; b, c, α, β
    b. $S = 17{,}4$ cm^2, a $= 5{,}42$ cm; b, c, v_c
    c. $c = 10$ dm, $c_b = 6$ dm; $a, b, c_a, v_c \alpha, \beta$
    d. $a = 3$ cm, $v_c = \sqrt{5}$ cm; $c, b, c_a, c_b \alpha, \beta$
9. Sestrojte úsečku, která má délku
    a. $\sqrt{10}$ cm
    b. $\sqrt{7}$
10. V kružnici o poloměru $r = 10$ cm určete vzdálenost dvou rovnoběžných tětiv o délkách 12 cm a 18 cm.

---

[1] KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus, 2002 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
MatematikaSŠ.relisticky.cz: když (se) chcete naučit.. *Www.realisticky.cz* [online]. Třeboň: Martin Krynický, 2016 [cit. 2016-02-17]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice.php?id=3
KRUPKA, Petr. *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 367 s. ISBN 80-7196-189-2.

Řešení

1. Ano, pro každé $n \geq 2$. Ověřte, že platí rovnost $(n^2+1)^2 = (n^2-1)^2 + (2n)^2$; n^2+1 je přepona.
2. $8\ \mathrm{cm}^2$
3.
   a. $12\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$
   b. $8\ \mathrm{cm}$
   c. $12\ \mathrm{cm}$
4. $5\sqrt{39}\ \mathrm{cm}^2$
5. $48\ \mathrm{cm}^2$ (rovnoběžník je kosočtverec, úhlopříčky v kosočtverci se půlí a jsou na sebe kolmé)
6. $3780\ \mathrm{mm}^2$
7. $\left(37+\sqrt{193}\right)\ \mathrm{cm}$
8.
   a. $b = 6{,}7\ \mathrm{m}, c = 10{,}1\ \mathrm{m}, \alpha = 41°49', \beta = 48°41'$
   b. $b = 6{,}42\ \mathrm{cm}, c = 8{,}4\ \mathrm{cm}, v_c = 4{,}14\ \mathrm{cm}$
   c. $a = 2\sqrt{10}\ \mathrm{dm}, b = 2\sqrt{15}\ \mathrm{dm}, c_a = 4\ \mathrm{dm}, v_c = 2\sqrt{6}, \alpha = 39°14', \beta = 50°46'$
   d. $c = \frac{9}{2}\ \mathrm{cm}, b = \frac{3}{2}\sqrt{5}\ \mathrm{cm}, c_a = 2\ \mathrm{cm}, c_b = \frac{5}{2}\ \mathrm{cm}, \alpha = 41°49', \beta = 48°11'$
9.
   a. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s délkami odvěsen 1 cm a 3 cm. Přepona bude mít délku $\sqrt{10}$; $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$
   b. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s délkou přepony 4 cm a délkou odvěsny 3 cm. Druhá z odvěsen bude mít délku $\sqrt{7}$ cm; $\sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$. Ke konstrukci lze využít i Euklidovu větu o výšce: $c_a = 7\ \mathrm{cm}, c_b = 1\ \mathrm{cm}, v_c = \sqrt{7}\ \mathrm{cm}$. Ke konstrukci využijeme Thaletovu kružnici.
10. Úloha má dvě řešení: $\left(8+\sqrt{19}\right)$ cm a $\left(8-\sqrt{19}\right)$ cm.